# מסלול ארוך בגרף אקראי

נדון במבנים פורשים של גרף, כמו עצים פורשים, שידוך ומעגל המילטון.

## אלגוריתם DFS

אלגוריתם סריקה לעומק על גרף שמספק מידע ממנו ניתן להפיק הרבה תובנות על הגרף. קלט: גרף G וסידור של צמתי הגרף. במהלך הסריקה מתחזק שלוש קבוצות:

1. S – כל הצמתים שסריקתם נשלמה.
2. T – כל הצמתים שלא התחילה סריקתם.
3. U – כל הצמתים שהתחילה אך לא נשלמה סריקתם. נשמרים במחסנית.

בכל סיבוב עד שמתקיים :

* אם :
* יהי v הצומת האחרונה שנוספה ל-U.
* אם :
* יהי u צומת ב- הראשונה לפי . העבר את u מ-T ל-U.
* אחרת, כלומר :
* העבר את v מ-U ל-S
* אחרת, כלומר :
* בחר את הצומת הראשונה ב-T לפי והעבר אותה ל-U.

תכונות:

1. בכל סיבוב בדיוק צומת אחת משנה מיקום, או מ-T ל-U או מ-U ל-S.
2. בכל זמן אין צלעות מ-S ל-T. מפני שאחרת לא היינו מכניסים צומת כזו ל-S.
3. כל הצמתים ב-U מהווים מסלול. כל צומת שנכנסת היא לסוף המסלול וכל צומת שיוצאת היא מסוף המסלול.

## מסלול ארוך בגרף

**הגדרת external neighborhood:** יהי גרף G ויהי . נגדיר את השכונה החיצונית של S, בסימון , להיות כל הצמתים ב-G שאינם ב-S אך יש להם שכן ב-S. .

**הגדרת** : לכל וגרף G עם לפחות k צמתים, נאמר ש-G הוא אם לכל קבוצת צמתים מתקיים .

**משפט**: אם G הוא גרף אזי G מכיל מסלול באורך .

**הוכחה**: יהי  *סידור שרירותי של הצמתים ב-G. נריץ DFS על G. לפי תכונה 1 של DFS קיים סיבוב בו בפעם הראשונה. לפי תכונה 2 כיוון שאין צמתים מ-S ל-T, כל השכנים החיצוניים של S נמצאים ב-U, ולכן . בסוף הסיבוב הקודם הוצאנו צומת מ-U ל-S, ולכן ברגע זה היו ב-U לפחות צמתים. לפי תכונה 3 הם חלק ממסלול שהוא לפחות באורך . מ.ש.ל.*

***משפט****: יהי G גרף עם n צמתים שמקיים את התכונה שלכל שתי קבוצות זרות כך ש-, יש ביניהם לפחות צלע אחת. אזי G מכיל מסלול באורך לפחות ומעגל באורך לפחות .*

***הוכחה****: נריץ DFS על הגרף. קיים סיבוב בו מתקיים . לפי תכונה 2 של DFS אין אף צלעות ביניהם, ולכן . אזי . אזי לפי תכונה 3 ב-U יש מסלול באורך . כדי למצוא מעגל, ניקח את המסלול שמצאנו וננסה לסגור אותו בקצוות. ניקח את k הצמתים האחרונים מכל קצה. לפי הנחה יש ביניהם לפחות צלע אחת. במקרה הגרוע צלע זו היא בין שתי הצמתים הכי עמוקים במסלול. לכן אורך המעגל שמצאנו הוא לפחות .*

## מעגל המילטון בגרף אקראי

זהו מעגל פשוט שעובר על כל הצמתים בגרף.

**משפט Dirac** - יהי G גרף עם לפחות 3 צמתים ודרגה מינימלית , אזי ב-G יש מעגל המילטון.

דרישה של דרגה מינימלית היא מאוד קשה. נראה משפט על גרף אקראי שמראה שמעגל המילטון נמצא לא מעט בגרפים.

**משפט**: נחלק לשניים:

1. אם אזי בגרף האקראי באופן אסימפטוטי כמעט וודאי **אין** מעגל המילטון.
2. אם אזי בגרף האקראי באופן אסימפטוטי כמעט וודאי **יש** מעגל המילטון.

במילים אחרות,  *זהו ה-* threshold*עבור התכונה שיש מעגל המילטון.*

נשים לב ששתי דרישות בסיסיות כדי שיהיה מעגל המילטון הוא שהגרף קשיר ו-. באופן מעניין, בעוד הקשירות בגרף ועבור ואי הופעה של צמתים מבודדים היא , ה- thresholdעבור *התכונה שדרגה מינימלית גדולה מ-2 היא , כלומר זהה ל-* threshold*עבור התכונה שיש מעגל המילטון.*

*כדי להוכיח את המשפט נוכיח כמה משפטים בסעיפים הבאים הנוגעים ל-*expander graphs.

## Booster Edges

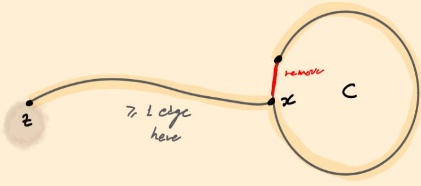
**הגדרה**: בגרף , נאמר כי צלע היא booster ב-G, אם לאחר הוספה שלה ל-G אזי מתקיים:

1. או שב- יש מעגל המילטון. נשים לב שאם G כבר המילטוני אזי כל הצלעות שאינן ב-G הן booster.
2. או שהמסלול הארוך ביותר ב-G גדל. כלומר, . נסמן המסלול הארוך ביותר ב-G.

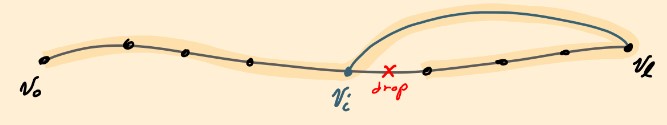
**משפט**: בכל גרף G הוספה של n צלעות booster יהפכו אותו להמילטוני.

הוכחה: במסלול הארוך ביותר יש לכל היותר צלעות, לכן הוספה של צלע נוספת בהכרח תקיים את התנאי השני.

***משפט ה-*lollipop***: אם G גרף קשיר ו-*P *המסלול הארוך ביותר ב-G שהקצוות שלו הן הצלעות . אזי אם אזי הוא* booster *ב-G.*

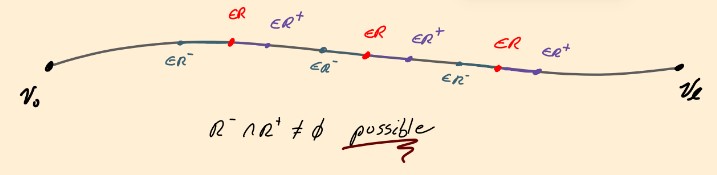
*הוכחה: נשים לב כי הוא מעגל ב-G. אם זהו מעגל המילטון סיימנו. נניח כי C אינו מעגל המילטון. אזי קיים צומת . הצומת z צריכה להיות קשורה במסלול כלשהו לאיזושהי צומת , מפני שאנו מניחים שהגרף קשיר. נשים לב כי המסלול המתחיל ב-z, מתחבר ל-x, עובר בכל המעגל C עד לצומת הסמוכה ל-x, זהו מסלול ב- שארוך יותר מ-P בלפחות צלע אחת.*

## Posa Rotation Extension

***הגדרת* Rotation**: *יהי גרף G ויהי המסלול הארוך ביותר. אם עבור , אזי נוכל ליצור מסלול באורך זהה ל-P, שמתחיל ב- עד משם ל- וחזור לצומת הקרוב ל-. מסלול זה נקרא* Rotation *על* P. *כל מסלול* Rotation *חייב להתחיל ב-. נגדיר שתי קבוצות נוספות בהקשר זה.*

*– זוהי קבוצת כל המסלולים האפשריים המושגים על ידי סדרה של* Rotation *אך שמירה על בראש המסלול. נשים לב כי כל* Rotation *אינו משנה את קבוצת הצמתים אלא רק את סדר הצלעות, .*

*– זוהי קבוצת כל הצמתים שנמצאים אחרונים במסלולים ב- שאינם .*

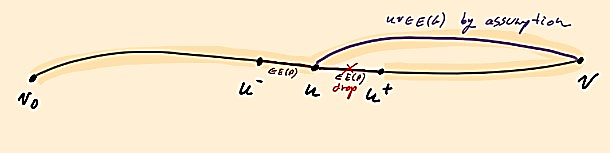
***הגדרת*** *: לכל קבוצת צמתים , נגדיר קבוצת כל הצמתים שהם ב-P לפני צומת מ-R, ו- קבוצת כל הצמתים שהם ב-P אחרי צומת מ-R. אנו נתמקד בעיקר ב-**.*

### משפט Posa

*יהי גרף G שהוא קשיר אך לא המילטוני, ויהי המסלול הארוך ביותר. אזי*

***הוכחה****: נניח כי , אחרת סיימנו. יהי ויהי . נשים לב כי . נרצה להוכיח שלא יכולה להיות צלע בין ל-. להשלים מדוע.*

*יהי ו-. נניח בשלילה כי . נחלק לשני מקרים:*

1. *אם : אזי כיוון ש- יש מסלול שמסתיים ב-v. נשים לב כי נוכל למצוא מסלול ארוך יותר בסתירה למקסימליות של P.*
2. *אם : נשים לב כי כי אחרת G היה המילטוני בניגוד להנחה, וכן מהגדרתו. לכן קיימים שני צמתים , כך שהצלעות ו- מוגדרים בכל rotation. זאת מפני שכאשר מורידים צלע באמצעות אזי אחת מהצמתים בצלע נכנסת ל- והשנייה ל-, בסתירה להגדרת . אמנם כעת כאשר מניחים אזי ניתן לבצע rotation על ואזי . סתירה!*

## Expander Graphs